ФИЗИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 519.63: 681.51: 539.5 https://doi.org/10.33619/2414-2948/39/01

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

*©**Кодиров А. У.,** Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан, I.abduraxmanova@tiiame.uz*

SOLUTION OF TASKS FOR ELASTOPLASTIC TRANSVERSAL ISOTROPIC BODIES

*©**Kodirov A.,** Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan, I.abduraxmanova@tiiame.uz*

Аннотация. В статье приводится доказательство теоремы о существовании и единственности обобщенности решения упругопластической краевой задачи, основанной на теории пластического течения трансверсально-изотропных тел с поверхностью нагружений в пространстве деформаций и напряжений.

Abstract. In this article: the theorem has been proven for existence and uniqueness of the generalized solution of elastoplastic boundary problem based on the theory of plastic yielding of transversal isotropic bodies from the loading surface in the deformation and stress space.

Ключевые слова: упругопластическая краевая задача, трансверсально-изотропные тела, деформация, пластичность, обобщенность, нагружение.

Keywords: elastoplastic boundary problem, transversal isotropic bodies, deformation, plasticity, generality, loading.

Обычно, в теории пластичности рассматриваются два типа теорий пластичности, а именно теории малых упругопластических деформаций (деформационная теория) и теории пластического течения. Деформационные теории представляют собой нелинейную связь между тензором напряжений и деформаций, и в сочетании с уравнением равновесия, соотношением Коши и соответствующими краевыми условиями составляют краевую задачу на основе теории малых упругопластических деформаций [1].

Известно, что в теории течения общая деформация представляется как сумма упругой и пластической деформаций, т. е.

$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$ и в сочетании с ассоциированным законом течения

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ при } f\left(\sigma_{ij}, \chi\right) = 0 \text{ , } df = \frac{df}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \geq 0 \tag{1}$$

Составляет определяющее соотношение теории пластического течения представляющего собой нелинейную связь между дифференциалами тензора деформаций и напряжений [2]. В соотношении (1) $\chi = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}$ — параметр, характеризующий процесс пластического деформирования.

Для формулировки краевой задачи теории пластического течения удобно иметь определяющее соотношение, разрешенное относительно дифференциала тензора напряжений [3].

Для наглядности постановки задач теории пластичности сначала приводим краевую задачу теории упругости для анизотропных тел, которая состоит из уравнения равновесия:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0,\ x_i \in V \tag{2}$$

определяющая соотношение с нелинейной конечной связью между тензором напряжений и деформацией $\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ соотношения Коши $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ и краевых условий

$$u_i \Big|_{\Sigma_1} = u_i^0,\ x_i \in \Sigma_1\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i^0,\ x_i \in \Sigma_2 \tag{3}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений; X_i, S_i — объемные и поверхностные силы, Σ_1, Σ_2 — части поверхности Σ объема V; n_j — внешняя нормаль к поверхности Σ_2 объема V; C_{ijkl} — тензор упругих констант, обладающий следующими свойствами симметрии и положительной определенности

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij},\ C_{ijkl}a_{ij}a_{kl} \geq 0,\ a_{ij} = a_{ji} \tag{4}$$

В случае если ортотропии тензор C_{ijkl} зависит от 9 независимых упругих постоянных

$$C_{ijkl} = \left\{ \begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & & & \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & & & \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & & & \\ & & & 2C_{1212} & & \\ & & & & 2C_{1313} & \\ & & & & & 2C_{2323} \end{array} \right. \tag{5}$$

а в случае трансверсальной изотропии тело дополнительно обладает следующими свойствами симметрии [1]:

$$C_{1133} = C_{2233},\ C_{2323} = C_{1313},\ C_{1212} = \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{2211}\right) \tag{6}$$

и в результате материал зависит от 5 независимых постоянных.

Заметим, что соотношение в случае деформационной теории трансверсально изотропных материалов, имеет вид [2]:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}\left(\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{j3}\right) + \sigma_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} + \frac{P_u}{p_u} p_{ij} + \frac{Q_u}{q_u} q_{ij}$$

где

$$\tilde{\sigma} = \left(\lambda_4 + \lambda_7\right)\tilde{\theta} + \lambda_5\varepsilon_{33}\ ,\ P_u = 2\lambda_1\left(1-\pi\right)p_u \tag{7}$$

$$Q_u = 2\lambda_9\left(1-\chi\right)q_u\ .$$

В соотношениях (6) и (7) приняты следующие обозначения: λ_3 , λ_4 , λ_5 , λ_7 , λ_9 — упругие постоянные трансверсально изотропных материалов, π , χ — экспериментально определяемые функции.

$$p_u = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_{ij}p_{ij}}\ ,\ q_u = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_{ij}q_{ij}} \tag{8}$$

$$P_u = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} P_{ij}P_{ij}}\ ,\ Q_u = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} Q_{ij}Q_{ij}} \tag{9}$$

$$p_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{\tilde{\theta}}{2}\left(\delta_{i3}\delta_{j3} - \delta_{ij}\right) + \varepsilon_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} - \left(\varepsilon_{i3}\delta_{j3} + \varepsilon_{j3}\delta_{i3}\right)$$

$$P_{ij} = \sigma_{ij} + \tilde{\sigma}\left(\delta_{i3}\delta_{j3} - \delta_{ij}\right) + \sigma_{33}\delta_{i3}\delta_{j3} - \left(\sigma_{i3}\delta_{j3} + \sigma_{3j}\delta_{i3}\right)$$

$$Q_{ij} = \sigma_{i3}\delta_{j3} + \sigma_{3j}\delta_{i3} - 2\sigma_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}$$

Рассматривая вместе с продифференцированным уравнением равновесия, соотношением Коши и соответствующими краевыми условиями получим краевую задачу теории пластического течения [3]:

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \dot{X}_i = 0, \dot{\sigma}_{ij} = D^{p}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\dot{u}_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\partial\dot{u}_l}{\partial x_k}\right) \tag{10}$$

$$\dot{u}_i\Big|_{\Sigma_1} = u_i^0\ ; \qquad \sum_{j=1}^{3}\dot{\sigma}_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_2} = \dot{S}_i\ , \tag{11}$$

где приняты следующие обозначения: $\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}$, $\dot{\sigma}_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt}$, $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$

$$D^{\varepsilon}_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}, npuF_p < 0uF_p < 0 \\ C_{ijkl} - H_p p_{ij}p_{kl} - H_q q_{ij}q_{kl} \\ npuF_p = 0, F_q = 0u\frac{\partial F_p}{\partial p_{ij}}dp_{ij} > 0, \frac{\partial F_q}{\partial q_{ij}}dq_{ij} > 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$D_{ijkl}^{\sigma} = \begin{cases} C_{ijkl}, \text{где} f_1 < 0 \text{и} f_2 < 0 \\ C_{ijkl} - \dfrac{4\lambda_9^2 P_{ij} P_{kl}}{\dfrac{1}{h_p} + 4\lambda_7 P^2} - \dfrac{4\lambda_9^2 Q_{ij} Q_{kl}}{\dfrac{1}{h_q} + 4\lambda_9 Q^2} \\ \text{при} f_1 = 0, f_2 = 0 \text{и} \dfrac{\partial f_1}{\partial P_{ij}} dP_{ij} > 0, \dfrac{\partial f_2}{\partial Q_{ij}} dQ_{ij} > 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Список литературы:

1. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. Халджигитов А. А. Некоторые вопросы анизотропной пластичности: дисс. … д-ра физ-мат. наук. Ташкент, 1995. 201 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
4. Полатов А. М. Об одном способе решения трехмерной задачи физически нелинейного деформирования трансверсально-изотропных многосвязных тел // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. №2. С. 56-75.

References:

1. Pobedrya, B. E. (1984). Mekhanika kompozitsionnykh materialov. Moscow, Izdatelstvo MGU. (in Russian).
2. Khaldzhigitov, A. A. (1995). Nekotorye voprosy anizotropnoi plastichnosti: Dr. diss. Tashkent, 201. (in Russian).
3. Zenkevich, O. (1975). Metod konechnykh elementov v tekhnike. Moscow, Mir. (in Russian).
4. Polatov, A. M. (2018). On one method of solving the three-dimensional problem of physically non-linear deformation of transversal-isotropic multi-variable bodies. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya,* (2), 56-75. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 24.01.2019 г.

Принята к публикации 27.01.2019г.

Ссылка для цитирования:

Кодиров А. У. Решение задач для упругопластических трансверсально-изотропных тел // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №2. С. 10-13. https://doi.org/10.33619/2414-2948/39/01.

Cite as (APA):

Kodirov, A. (2019). Solution of tasks for elastoplastic transversal isotropic bodies. *Bulletin of Science and Practice, 5*(2), 10-13. https://doi.org/10.33619/2414-2948/39/01. (in Russian).