УДК 51.72: 51.73

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/43/02>

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

©Шувалова Л. Е., ORCID: 0000-0001-7272-3898, Нижнекамский химико-технологический институт, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, leshyvalova@yandex.ru

©Зотин А. В., Нижнекамский химико-технологический институт, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, artem.zotin99@mail.ru

©Крутикова А. А., Нижнекамский химико-технологический институт, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, lino4ka.9933@gmail.com

©Сысолятина А. И., Нижнекамский химико-технологический институт, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, Sysolyatina.A2000@mail.ru

RESEARCH AND APPROXIMATE SOLUTION OF A PHYSICAL PROBLEM

©Shuvalova L., ORCID: 0000-0001-7272-3898, Nizhnekamsk Institute of Chemical Technology Kazan National Research Technological Universit, Nizhnekamsk, Russia, leshyvalova@yandex.ru
©Zotin A., Nizhnekamsk Institute of Chemical Technology, Kazan National Research Technological Universit, Nizhnekamsk, Russia, artem.zotin99@mail.ru

©Krutikova A., Nizhnekamsk Institute of Chemical Technology, Kazan National Research Technological Universit, Nizhnekamsk, Russia, lino4ka.9933@gmail.com

©Sysolyatina A., Nizhnekamsk Institute of Chemical Technology, Kazan National Research Technological Universit, Nizhnekamsk, Russia, Sysolyatina.A2000@mail.ru

Аннотация. Предлагается решение задачи из раздела физики об электролизе, которая сводится к приближенному решению дифференциального уравнения с численной реализацией в математическом пакете MathCad.

Abstract. The problem from the section of physics about electrolysis is considered, which is reduced to an approximate solution of a differential equation with numerical implementation in the mathematical package MathCad.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, степенной ряд, численные методы.

Keywords: nonlinear differential equation, power series, numerical methods.

Электролиз — основной метод промышленного производства алюминия, хлора, важнейший способ получения фтора, щелочных и щелочноземельных металлов, эффективный метод рафинирования металлов. Именно поэтому проблема электролиза занимает центральное место в физических исследованиях.

В данной работе на примере одной из задач электрического тока в жидкостях предлагаются три подхода: метод Эйлера, метод Рунге-Кутты и разложение искомой функции в степенной ряд.

Рассмотрим следующую задачу [1]. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности $L=0,4$ генри и электролитической ванны, наполненной литром воды, подкисленной небольшим количеством серой кислоты. Вода разлагается током, при этом меняются концентрация и сопротивление раствора. Напряжение на клеммах поддерживается постоянным (20 в). При электролизе выделяется некоторое количество вещества пропорциональное времени, току и электрохимическому эквиваленту, который равен $0,000187$ г/кулон. Сопротивление раствора в начале опыта $R_0=2$ Ом, начальный ток 10 А. Найти зависимость объема воды в сосуде от времени.

Как известно, это явление описывается дифференциальным уравнением

$$E = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{V_0 - kQ}{k_1}, \quad (1)$$

где Q — количество электричества, протекшее через цепь за промежуток времени от начала опыта до момента t .

Из уравнения (1) выражается Q через переменную V — количество воды в сосуде в момент времени t . В результате получается следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$V''(t) + aV(t)V'(t) + b = 0, \quad (2)$$

здесь $a = \frac{1}{k_1 L} = 0,005$, $b = \frac{kE}{L} = 0,00935$.

Уравнение (2) точно проинтегрировать с помощью элементарных функций не удастся, поэтому его решение удобно искать в виде степенного ряда.

$$V(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{V^{(n)}(0)}{n!} t^n, \quad (3)$$

где $V(0)=V_0 = 1000$ см³, $V'(0)=-kI_0 = -0,00187$ см³/сек, а остальные производные $V^{(n)}(0)$ ($n = 2, 3, \dots$) находятся путем последовательного дифференцирования уравнения

$$V''(t) = -aV(t)V'(t) - b. \quad (4)$$

Численная реализация рассмотренной схемы представлена на Рисунке 1.

```

a := 0.005    b := 0.00935
i := 1..5     h := 0.01
t0 := 0       t1 := t0 + i * h
V0 := 1000    V10 := -0.00187
V20 := -a * V0 * V10 - b
V20 = 0
V30 := -a * V10 * V10 - a * V0 * V20
V30 = -1.748 × 10-8
V40 := -a * 2 * V10 * V20 - a * V10 * V20 - a * V0 * V30
V40 = -5
V(t) := (V0 + (V10 / 1!) * t + (V20 / 2!) * t^2 + (V30 / 3!) * t^3)

```

Рисунок 1. Численная реализация схемы

Из представленных расчетов получаем степенной ряд

$$V(t) = 1000 - 0.00187t - 2.91 \cdot 10^{-9}t^3 + 3.64 \cdot 10^{-9}t^4 - 3.64 \cdot 10^{-9}t^5 + 3.04 \cdot 10^{-9}t^6 - 2.17 \cdot 10^{-9}t^7 + \dots, \quad (5)$$

из которого видно, что коэффициенты знакопередающегося ряда убывают, а с течением времени объем воды постепенно уменьшается, что наблюдается на графике.

В подтверждение полученных результатов рассмотрим решение задачи (1) численными методами [2], дающими решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $V(t)$: метод Эйлера и метод Рунге-Кутты, сравним полученные результаты.

Проинтегрировав уравнение (2) получим уравнение вида:

$$V'(t) = -\frac{aV^2(t)}{2} - bt + V'(0) + \frac{aV^2(0)}{2}. \quad (6)$$

Расчетная формула метода Эйлера в математическом пакете MathCad имеет вид:

$$\begin{aligned} d &:= a \cdot \frac{1000000}{2} - 0.00187 \\ f(V, t) &:= \left(d - \frac{a \cdot V^2}{2} + 0.00935 \cdot t \right) \\ V_i &:= V_{i-1} + h \cdot f(V_{i-1}, t_{i-1}) \end{aligned}$$

Результаты вычислений двух рассмотренных методов представлены на Рисунке 2, где $z(p)$ — степенной ряд (5).

Рисунок 2. Вычисления по методам Эйлера и Рунге-Кутты

Кроме того, получены вычисления методом Рунге-Кутты 4-го порядка применительно к уравнению (2), которые решены при помощи встроенной функции `rkfixed` [3] (Рисунок 3) математического пакета MathCad.

Рисунок 3. Решение при помощи встроенной функции rkfixed

Погрешность вычислений можно проследить по приведенным графикам, которые показывают, что методы Эйлера и Рунге-Кутты обеспечивают хорошую точность на начальном промежутке времени, но затем приводят к резкому накоплению ошибок.

Список литературы:

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа М.: Наука, 1985. 384 с.
2. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие. СПб.: Лань. 2017. 368 с.
3. Кирьянов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. СПб.: БХВ-Петербург. 2012. 432 с.

References;

1. Berman, G. N. (1985). Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza Moscow, Nauka, 384.
2. Kopchenova, N. V., & Maron, I. A. (2017). Vychislitel'naya matematika v primerakh i zadachakh: uchebnoe posobie. St. Petersburg, Lan'. 368.
3. Kir'yanov, D. V. (2012). Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. St. Petersburg, BKhV-Peterburg. 432.

Работа поступила
в редакцию 14.05.2019 г.

Принята к публикации
19.05.2019 г.

Ссылка для цитирования:

Шувалова Л. Е., Зотин А. В., Крутикова А. А., Сысолятина А. И. Исследование и приближенное решение физической задачи // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №6. С. 21-24. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/43/02>

Cite as (APA):

Shuvalova, L., Zotin, A., Krutikova, A., & Sysolyatina, A. (2019). Research and Approximate Solution of a Physical Problem. *Bulletin of Science and Practice*, 5(6), 21-24. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/43/02> (in Russian).