ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 515.12 https://doi.org/10.33619/2414-2948/52/01

ФУНКТОР *IS* В КАТЕГОРИИ КОМПАКТНЫХ ХАУСДОРФОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

©Курбанов Х. Х., *Академия Вооруженных Сил Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан, qhamid_83@mail.ru*
©Ёдгаров С. Ж., *Ташкентский архитектурно строительный институт, г. Ташкент, Узбекистан, syodgarov66@mail.ru*

A FUNCTOR *IS* IN THE CATEGORY COMPACT HAUSDORFF SPACES

©Kurbanov Kh., *Academy of the Armed Forces of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, qhamid_83@mail.ru*
©Yodgarov S., *Tashkent architecture and civil engineering institute, Tashkent, Uzbekistan, syodgarov66@mail.ru*

Аннотация. Построено пространство нормированных, однородных и max–plus–полуаддитивных функционалов и дано его описание. Установлено, что операция взятия пространства нормированных, однородных и max-plus-полуаддитивных функционалов образует нормальный функтор, действующий в категории компактных Хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений.

Abstract. We construct a space of normed, homogeneous and max-plus-semiadditive functionals and we give its description. Further we establish that the construction of taking of a space of normed, homogeneous and max-plus-semiadditive functionals, forms a normal functor acting in the category of Hausdorff compact spaces and their continuous maps.

Ключевые слова: категория, нормальный функтор, max-plus-полуаддитивный функционал.

Keywords: category, normal functor, max-plus-semiadditive functional.

Введение

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций, определенных на X, с обычными поточечными алгебраическими операциями и $\sup$-нормой. На множестве $C(X)$ вводят новые операции — новое умножение на число и новое сложение функций по правилам:

1) $\odot : \mathbb{R} \times C(X) \to C(X)$ по правилу $\odot(\lambda, \varphi) = \lambda \odot \varphi = \varphi + \lambda_X$, где $\varphi \in C(X)$ и λ_X — постоянная на X функция, принимающая везде значение $\lambda \in \mathbb{R}$;

2) $\oplus : C(X) \times C(X) \to C(X)$ по правилу $\oplus(\varphi, \psi) = \varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$, где $\varphi, \psi \in C(X)$.

Определение 1 [2]. Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется идемпотентной вероятностной мерой на X, если он обладает следующими свойствами:

(i) (нормированность): $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) (max-plus-однородность): имеем $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$;

(iii) (max-plus-аддитивность): $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Число $\mu(\varphi)$ называется интегралом Маслова соответствующим к μ. Множество всех идемпотентных вероятностных мер на X обозначается [2] через $I(X)$. Всякая идемпотентная вероятностная мера является непрерывной [3]. Следовательно, $I(X) \subset C_p(C(X)) \subset \mathbb{R}^{C(X)}$. Обеспечим $I(X)$ с индуцированной из $\mathbb{R}^{C(X)}$ топологией. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ относительно этой топологии образуют множества вида

$$\langle\mu;\ \varphi_1, \dots, \varphi_k;\ \varepsilon\rangle = \{\ \mu' \in I(X):\ |\mu'(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\}, \qquad (1)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$.

Известно [2], что для всякого компактного хаусдорфово пространства X пространство $I(X)$ также является компактным хаусдорфовым пространством.

Рассмотрим непрерывное отображение $f: X \to Y$ компактных хаусдорфовых пространств. Оно индуцирует следующее естественное отображение $I(f): I(X) \to I(Y)$:

$$I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) \qquad (2)$$

Таким образом, конструкция I переводит компактные хаусдорфовы пространства в компактные хаусдорфовы пространства, а непрерывные отображения компактных хаусдорфовых пространств — в непрерывные отображения компактных хаусдорфовых пространств. В таких случаях говорят, что конструкция I образует функтор, действующий в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений. В работе [2] установлено, что функтор I является нормальным в смысле Е. В. Щепина [1].

Так как функтор I нормален, то для каждой идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp} \mu = \cap \{F:\ F \text{ замкнуто в } X \text{ и } \mu \in I(F)\}.$$

Для положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X):\ |\operatorname{supp} \mu| \le n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно [2] в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем. Для каждой точки $x \in X$ мера Дирака $\delta_x: C(X) \to \mathbb{R}$, определенная по формуле $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$, является идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем, причем $\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$. Дальнейшее продвижение теории идемпотентных мер, и ассоциированные с ней отрасли наблюдалось в работах [3-7].

Следующее определение предложено А. Заитовым.

Определение 2. Функционал $\mu: C(X) \to \mathbb{R}$ называется max-plus-полуаддитивным, если: $\mu(\varphi \oplus \psi) \ge \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всякой пары $\varphi, \psi \in C(X)$.

Множество всех max-plus-полуаддитивных, нормированных и max-plus-однородных функционалов обозначим через $IS(X)$. Множество $IS(X)$ рассмотрим как подпространство тихоновского произведения

Т. 6. №3. 2020
DOI: 10.33619/2414-2948/52

$$\prod_{\varphi\in C(X)} \mathbb{R}_\varphi, \tag{3}$$

где $\mathbb{R}_\varphi = \mathbb{R}$ — числовая прямая для каждой $\varphi \in C(X)$. Множества вида (1), более точно, множества вида

$$\langle\mu;\ \varphi_1,\dots,\varphi_k;\ \varepsilon\rangle = \{\,\mu' \in IS(X)\colon\ |\mu'(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, \qquad i = 1,\dots,k\} \tag{1'}$$

где $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_k \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$, образуют базу окрестностей функционала $\mu \in IS(X)$ относительно этой индуцированной топологии. Но, с другой стороны, множества вида ($1'$) образуют топологию поточечной сходимости на $IS(X)$.

Предложение 1. Каждый max-plus-полуаддитивный, нормированный и однородный функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ непрерывен.

Доказательство. Сначала отметим, что всякий max-plus-полуаддитивный функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ сохраняет порядок, т. е. для произвольной пары $\varphi, \psi \in C(X)$ неравенство $\varphi \le \psi$ влечет $\mu(\varphi) \le \mu(\psi)$. Действительно, так как для функций $\varphi,\ \psi\ \in\ C(X)$ неравенство $\varphi \le \psi$ равносильно равенству $\varphi\oplus\psi =\ \psi$, то имеем $\mu(\varphi) \le \mu(\varphi)\oplus\mu(\psi) \le \mu(\varphi\oplus\psi) = \mu(\psi)$.

С другой стороны, всякий max-plus-однородный функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ слабо аддитивен, т. е. $\mu(\phi\ +\ \lambda_X)\ =\ \mu(\phi)\ +\ \lambda$ для всех $\phi\ \in\ C(X), \lambda\ \in\ \mathbb{R}$.

Пусть теперь $\phi, \psi\ \in\ C(X)$ – функции такие, что $\|\psi - \phi\|\ <\ \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon\ >\ 0$. Тогда

$$-\varepsilon_X < \psi - \phi < \varepsilon_X,$$
$$\phi - \varepsilon_X < \psi < \phi + \varepsilon_X,$$
$$\mu(\phi) - \varepsilon < \mu(\psi) < \mu(\phi) + \varepsilon,$$
$$|\mu(\psi) - \mu(\phi)| < \varepsilon.$$

Предложение 1 доказано.

Для краткости, max-plus-полуаддитивный, нормированный и однородный функционал далее будем называть max-plus-полуаддитивными функционалами.

Предложение 2. Топологическое пространство $IS(X)$, снабженное поточечной сходимости, является компактным хаусдофовым пространством.

Доказательство. Хаусдорвофость пространства $IS(X)$ вытекает из того, что оно является тихоновским пространством как подпространство тихоновского произведения (3).

Отметим, что $IS(X) \subset \prod_{\varphi\in C(X)}[m_\varphi,\ M_\varphi]$, где для $\varphi \in C(X)$ положено $m_\varphi = \min\{\varphi(x)\colon\ x \in X\}$, $M_\varphi = \max\{\varphi(x)\colon\ x \in X\}$. В самом деле, как уже в доказательстве предложения 1 было отмечено, что всякий max-plus-полуаддитивный функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ сохраняет порядок. Поэтому, в силу нормированности, двойное неравенство $(m_\varphi)_X \le \varphi \le (M_\varphi)_X$ влечет двойное неравенство $m_\varphi \le \mu(\varphi) \le M_\varphi$.

Теперь так как произведение замкнутых отрезков $\prod_{\varphi\in C(X)}[m_\varphi,\ M_\varphi]$ — компакт в топологии произведения, то достаточно установить замкнутость $IS(X)$ в этом произведении. Возьмем произвольную сеть $\{\mu_\alpha\} \subset IS(X)$. Тогда $\{\mu_\alpha\} \subset \prod_{\varphi\in C(X)}[m_\varphi,\ M_\varphi]$. Поэтому, в силу компактности произведения, существует предел $\mu_0 \in \prod_{\varphi\in C(X)}[m_\varphi,\ M_\varphi]$. Доказательство завершится, если установим, что $\mu_0 \in IS(X)$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\mu_0(\lambda) = \lim_\alpha \mu_\alpha(\lambda) = \lim_\alpha \lambda = \lambda$, т. е. μ_0 нормирован. Для каждой пары $\varphi \in C(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\mu_0(\lambda\odot\varphi) = \lim_\alpha \mu_\alpha(\lambda\odot\varphi) = \lim_\alpha \lambda\odot\mu_\alpha(\varphi) = \lambda\odot \lim_\alpha \mu_\alpha(\varphi) = \lambda\odot\mu_0(\varphi)$, иными словами, μ_0 max-plus-однороден. Возьмем произвольную пару $\varphi,\ \psi\ \in\ C(X)$. Имеем $\mu_0(\varphi\oplus\psi) = \lim_\alpha \mu_\alpha(\varphi\oplus\psi) \ge$

Т. 6. №3. 2020
DOI: 10.33619/2414-2948/52

$\lim_{\alpha}\left(\mu_{\alpha}(\varphi) \oplus \mu_{\alpha}(\psi)\right) = \lim_{\alpha} \mu_{\alpha}(\varphi) \oplus \lim_{\alpha} \mu_{\alpha}(\psi) = \mu_0(\varphi) \oplus \mu_0(\psi)$, что означает max-plus-полуаддитивность функционала μ_0. Таким образом, $\mu_0 \in IS(X)$.

Предложение 2 доказано.

Рассмотрим непрерывное отображение $f: X \to Y$ компактных хаусдорфовых пространств. Оно индуцирует следующее естественное отображение $I(f): I(X) \to I(Y)$:

$$IS(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) \tag{2'}$$

Из предложения 1 вытекает, что отображение $IS(f)$ непрерывно.

Напомним следующее понятие. Пусть $C = \{O,\ M\}$ и $C' = \{O',\ M'\}$ — две категории. Отображение $F: C \to C'$, переводящие объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется ковариантным функтором из категории C в категории C', если:

$F1$) для всякого морфизма $f: X \to Y$ из категории C морфизм $F(f)$ действует из $F(X)$ в $F(Y)$;

$F2$) $F(id_X) = id_{F(X)}$ для всякого $X \in O$;

$F3$) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ для любых морфизмов f и g из M.

Предложение 3. Конструкция IS является ковариантным функтором в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений.

Доказательство. Из определения вытекает, что IS удовлетворяет условию $F1$).

Пусть $id_X: X \to X$ — тождественное отображение. Для каждого $\mu \in IS(X)$ имеем

$$IS(id_X)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ id_X) = \mu(\varphi).$$

Так как μ и φ произволны, то стало быть $IS(id_X)(\mu) = \mu$.

Покажем, что IS сохраняет композицию отображений. Пусть X, Y, Z — компакты и $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ — непрерывные отображения. Для $\mu \in IS(X)$ и $\varphi \in C(Z)$ имеем

$IS(g \circ f)(\mu)(\varphi) = \mu\left(\varphi \circ (g \circ f)\right) = \mu\left((\varphi \circ g) \circ f\right) = IS(f)(\mu)(\varphi \circ g) = IS(g) \circ IS(f)(\mu)(\varphi)$, т. е. $IS(g \circ f) = IS(g) \circ IS(f)$.

Предложение 3 доказано.

Таким образом, конструкция IS переводя компактные хаусдорфовы пространства в компактные хаусдорфовы пространства, а непрерывные отображения компактных хаусдорфовых пространств — в непрерывные отображения компактных хаусдорфовых пространств, образует ковариантный функтор, действующий в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений.

В настоящей работе установим, что функтор IS является нормальным функтором в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений.

2. Описание пространства max-$plus$-полуаддитивных функционалов

Отметим, что для каждого компактного Хаусдорфово пространства X имеет место

$$I(X) \subset IS(X) \tag{4}$$

Но, обратное вообще говоря, не верно.

Пример 1. Рассмотрим двухточечное дискретное пространство $X = \{a,\ b\}$ и функции φ, $\psi : X \to \mathbb{R}$, определенные равенствами

$$\varphi(a) = 0, \qquad \varphi(b) = 1;$$
$$\psi(a) = 1, \qquad \psi(b) = 0.$$

Тогда

$$(\varphi \oplus \psi)(a) = 1, \qquad (\varphi \oplus \psi)(b) = 1.$$

Для идемпотентных вероятностных мер $\mu_1 = 0 \odot \delta_a \oplus \lambda_1 \odot \delta_b$, $\mu_2 = \lambda_2 \odot \delta_a \oplus 0 \odot \delta_b$, где $-\infty \le \lambda_1,\ \lambda_2 < -1$, функционал $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ является max-plus-полуаддитивным функционалом, но не является идемпотентной вероятностной мерой, здесь $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Действительно, имеем

$$\mu(\varphi \oplus \psi) = \alpha\mu_1(\varphi \oplus \psi) + \beta\mu_2(\varphi \oplus \psi) = \max\{\alpha\mu_1(\varphi), \alpha\mu_1(\psi)\} + \max\{\beta\mu_2(\varphi), \beta\mu_2(\psi)\} =$$
$$= \max\{\alpha\mu_1(\varphi) + \max\{\beta\mu_2(\varphi), \beta\mu_2(\psi)\}, \quad \alpha\mu_1(\psi) + \max\{\beta\mu_2(\varphi), \beta\mu_2(\psi)\}\} \ge$$
$$\ge \max\{\alpha\mu_1(\varphi) + \beta\mu_2(\varphi),\ \alpha\mu_1(\psi) + \beta\mu_2(\psi)\} = \max\{\mu(\varphi),\ \mu(\psi)\} = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi),$$

т. е. $\mu(\varphi \oplus \psi) \ge \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

Покажем, что тут равенство не выполнено. Вычислим значения функционала μ при φ, ψ и $\varphi \oplus \psi$:

$$\mu(\varphi) = \alpha\mu_1(\varphi) + \beta\mu_2(\varphi) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta,$$
$$\mu(\psi) = \alpha\mu_1(\psi) + \beta\mu_2(\psi) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha,$$
$$\mu(\varphi \oplus \psi) = \alpha\mu_1(\varphi \oplus \psi) + \beta\mu_2(\varphi \oplus \psi) = \alpha + \beta = 1.$$

Так как $\alpha < 1$ и $\beta < 1$, то $\mu(\varphi \oplus \psi) = 1 > \alpha \oplus \beta = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$. Таким образом, $\mu \in IS(X) \setminus I(X)$, т. е. включение (4) необратимо.

Определение 3. Будем говорить, что max-plus-полуаддитивный функционал $\mu \in IS(X)$ сосредоточен на замкнутом подмножестве A компактного хаусдорфово пространства X, если $\mu(\varphi) = 0$ для всякой функции $\varphi \in C(X)$ такой, что $\varphi(x) = 0$ при $x \in A$. Наименьшее множество, на котором сосредоточен max-plus-полуаддитивный функционал μ, называется носителем μ, и обозначается $\operatorname{supp}\mu$.

Легко установить следующего утверждения, которое имеет самостоятельный интерес.

Лемма 1. max-plus-полуаддитивный функционал $\mu \in IS(X)$ сосредоточен на замкнутом подмножестве A компактного хаусдорфово пространства X тогда и только тогда, когда $\mu \in IS(A)$

Для положительного целого числа n определим следующее множество

$$IS_n(X) = \{\mu \in IS(X)\colon\ |\operatorname{supp}\mu| \le n\}.$$

Положим

$$IS_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} IS_n(X).$$

Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.

Лемма 2. Множество $IS_\omega(X)$ всюду плотно в $IS(X)$.

Доказательство. Каждый max-plus-полуаддитивный функционал μ с конечным носителем представляется в виде разложения

$$\mu = \alpha_1 \nu_{x_{11}\dots x_{1n_1}}^{\lambda_{11}\dots\lambda_{1n_1}} + \alpha_2 \nu_{x_{21}\dots x_{2n_2}}^{\lambda_{11}\dots\lambda_{2n_2}} + \dots + \alpha_n \nu_{x_{k1}\dots x_{kn_k}}^{\lambda_{k1}\dots\lambda_{kn_k}}$$

единственным способом (с точностью до перестановки местами), где

$$\nu_{x_{i1}\dots x_{in_i}}^{\lambda_{i1}\dots\lambda_{in_i}} = \lambda_{i1}\odot\delta_{x_{i1}}\oplus\dots\oplus\lambda_{in_i}\odot\delta_{x_{in_i}},$$
$$\{x_{i1},\dots,x_{in_i}\}\subset \operatorname{supp}\mu, \qquad \cup_{i=1}^{k}\{x_{i1},\dots,x_{in_i}\} = \operatorname{supp}\mu,$$
$$-\infty < \lambda_{ij} \le 0,\ \lambda_{i1}\oplus\dots\oplus\lambda_{in_i} = 0,$$
$$\alpha_i \ge 0,\ i = 1,\dots,k, \qquad \textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1.$$

При этом, для каждого n имеем

$$IS_n(X) = \left\{\sum \alpha_i \nu_{x_{i1}\dots x_{in_i}}^{\lambda_{i1}\dots\lambda_{in_i}}:\ \{x_{i1},\dots,x_{in_i}\}\subset X, \quad \left|\cup\{x_{i1},\dots,x_{in_i}\}\right| \le n;\ \ \alpha_i \ge 0, \quad \sum\alpha_i = 1\right\}.$$

Ясно, что $\nu_{x_{i1}\dots x_{in_i}}^{\lambda_{i1}\dots\lambda_{in_i}} \in I(X)$, т. е. функционал $\nu_{x_{i1}\dots x_{in_i}}^{\lambda_{i1}\dots\lambda_{in_i}}$ является идемпотентной вероятностной мерой. Поэтому из всюду плотности [2] множества $I_\omega(X)$ в $I(X)$ вытекает всюду плотность множества $IS_\omega(X)$ в $IS(X)$. Лемма 2 доказана.

Пусть A — подмножество компактного хаусдорфово пространства $I(X)$. Для каждой конечной системы $\{B_1,\dots,B_n\}$ подмножеств $B_i \subset A$ и чисел α_i, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_i \ge 0, \qquad i = 1,2,\dots,n, \qquad \sum\alpha_i = 1, \tag{5}$$

определим функционал

$$\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \nu_{B_i} \tag{6}$$

где $\nu_{B_i} = \bigoplus\limits_{\mu\in B_i}\mu$.

Предложение 4. Для каждого множества A, системы $\{B_1,\dots,B_n\}$ его замкнутых подмножеств и чисел α_i, удовлетворяющих условиям (5), функционал $\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, определенный равенством (6), является max-plus-полуаддитивным функционалом, т. е. $\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \in IS(X)$.

Доказательство. Вначале покажем, что функционал $\nu_{B_i} = \bigoplus\limits_{\mu\in B_i}\mu$, $i = 1,\dots,n$, является идемпотентной вероятностной мерой, т. е. нормирован, max-plus-однороден и max-plus-аддитивен. Для каждого $\lambda\in\mathbb{R}$ имеем

$$\nu_{B_i}(\lambda_X) = \bigoplus_{\mu\in B_i}\mu(\lambda_X) = \lambda,$$

т. е. нормированность выполнена.

Т. 6. №3. 2020
DOI: 10.33619/2414-2948/52

Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ и каждой $\varphi \in C(X)$ справедливо

$$\nu_{B_i}(\lambda \odot \varphi) = \bigoplus_{\mu \in B_i} \mu(\lambda \odot \varphi) = \bigoplus_{\mu \in B_i} \big(\lambda \odot \mu(\varphi)\big) = \lambda \odot \bigoplus_{\mu \in B_i} \mu(\varphi) = \lambda \odot \nu_{B_i}(\varphi),$$

т. е. max-plus-однородность выполнена.

Для каждой пары $\varphi, \psi \in C(X)$ верно

$$\nu_{B_i}(\varphi \oplus \psi) = \bigoplus_{\mu \in B_i} \mu(\varphi \oplus \psi) = \bigoplus_{\mu \in B_i} \big(\mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)\big) = \bigoplus_{\mu \in B_i} \mu(\varphi) \oplus \bigoplus_{\mu \in B_i} \mu(\psi) = \nu_{B_i}(\varphi) \oplus \nu_{B_i}(\psi),$$

т. е. max-plus-аддитивность выполнена. Таким образом, $\nu_{B_i} \in I(X)$, $i = 1, \dots, n$.

Теперь покажем, что $\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \in IS(X)$. Покажем его нормированность. Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ верно

$$\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_{B_i}\right)(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_i \nu_{B_i}(\lambda)\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \lambda\,.$$

Установим max-plus-однородность функционала $\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$. Имеем

$$\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\lambda \odot \varphi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_{B_i}\right)(\lambda \odot \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i \left(\nu_{B_i}(\lambda \odot \varphi)\right)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i \left(\lambda \odot \nu_{B_i}(\varphi)\right)\Big) = \lambda \odot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_{B_i}(\varphi) = \lambda \odot \nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\varphi)$$

для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ и каждой $\varphi \in C(X)$.

Остаётся показать max-plus-полуаддитивность функционала $\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$:

$$\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\varphi \oplus \psi) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_{B_i}\right)(\varphi \oplus \psi) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i \left(\nu_{B_i}(\varphi \oplus \psi)\right)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i \left(\nu_{B_i}(\varphi) \oplus \nu_{B_i}(\psi)\right)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha_i \nu_{B_i}(\varphi) \oplus \alpha_i \nu_{B_i}(\psi)\Big) \geq$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_{B_i}(\varphi)\right) \oplus \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_{B_i}(\psi)\right) = \nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\varphi) \oplus \nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\psi),$$

т. е. $\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\varphi \oplus \psi) \geq \nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\varphi) \oplus \nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\psi)$ для каждой пары $\varphi, \psi \in C(X)$.

Предложение 4 доказано.

Определим следующее множество

$$A_s = \left[\left\{\nu_{B_1,\dots,B_n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\colon\ B_1, \dots, B_n \text{ замкнуты в } A;\ \ \alpha_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, n;\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right\}\right]_{IS(X)}.$$

Следующее утверждение является ключевым результатом работы.

Теорема 1. Для каждого компактного хаусдорфово пространства X справедливо равенство

$$\big(I(X)\big)_S = IS(X).$$

Т. 6. №3. 2020
DOI: 10.33619/2414-2948/52

Доказательство. Из леммы 2 можно сделать следующий вывод: каждый функционал $\mu \in IS_\omega(X)$ представим в виде аффинного разложения конечного числа некоторых идемпотентных вероятностных мер из $I_\omega(X)$. Отсюда, в силу всюду плотности $IS_\omega(X)$, вытекает требуемое равенство. Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1 фактически описывает пространство $IS(X)$ max-plus-полуаддитивных функционалов на языке идемпотентных вероятностных мер, т. е. элементами $\mu \in I(X)$.

3. Нормальность функтора IS max-plus-полуаддитивных функционалов

Определение 4 [1]. Ковариантный функтор $F: Comp \to Comp$ называется нормальным, если он удовлетворяет следующим условиям: функтор F непрерывен, сохраняет вес, пересечения, прообразы, мономорфен и эпиморфен, переводит пустое множество в пустое, а одноточечное — в одноточечное.

Предложение 5. Функтор IS сохраняет вес бесконечных компактных хаусдорфовых пространств, т. е. для любого бесконечного компактного хаусдорфово пространства X имеет место равенство $w\big(IS(X)\big) = w(X)$.

Доказательство. Из равенства $w\big(I(X)\big) = w(X)$, установленного в [2], и включения (4) вытекает, что $w\big(IS(X)\big) \geq w(X)$. Обратное неравенство, более точно неравенство $w\big(IS(X)\big) \leq w\big(I(X)\big)$ вытекает из теоремы 1. Предложение 5 доказано.

Предложение 6. IS — мономорфный функтор, т. е. сохраняет инъективность отображений компактов.

Доказательство. Пусть μ_1, $\mu_2 \in IS(X)$ $\mu_1 \neq \mu_2$. В силу инъективности отображения f существует функция $\varphi \in C(Y)$, такая, что $\mu_1(\varphi \circ f) \neq \mu_2(\varphi \circ f)$. Поэтому $IS(f)(\mu_1)(\varphi) = \mu_1(\varphi \circ f) \neq \mu_2(\varphi \circ f) = IS(f)(\mu_2)(\varphi)$. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение «на», то отображение $IS(f): IS(X) \to IS(Y)$ – также непрерывно и «на».

Доказательство. Непрерывность отображения $IS(f)$ показано в предложении 3. Сюрьективность отображения $IS(f)$ вытекает из теоремы 1 и сюрьективности отображения $I(f)$. Предложение 7 доказано.

Предложение 8. Функтор $IS: Comp \to Comp$ сохраняет

a) точку,

b) пустое множество.

Доказательство. a) Пусть $x \in X$. По определению имеем $IS(\{x\}) = \{\delta_x\}$.

b) Пусть $X = \emptyset$. Тогда $C(X) = \emptyset$. Следовательно, $\mathbb{R}^{C(X)} = \mathbb{R}^{\emptyset} = \emptyset$. Откуда $IS(\emptyset) \subset \emptyset$. Предложение 8 доказано.

Предложение 9. Если A — замкнутое подмножество компактного хаусдорфово пространства X, то $IS(A) \subset IS(X)$.

Доказательство. Пусть A замкнуто в X и $\mu \in IS(A)$. Тогда функционал μ сосредоточен на A. Это в силу леммы 1 равносильно тому, что $\operatorname{supp}\mu \subset A$. Тогда $\operatorname{supp}\mu \subset X$, откуда $\mu \in IS(X)$. Предложение 9 доказано.

Предложение 10. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение между компактными хаусдорфовыми пространствами и $B \subset Y$, то $IS\big(f^{-1}(B)\big) = IS(f)^{-1}\big(IS(B)\big)$.

Доказательство. Пусть $\mu \in IS\big(f^{-1}(B)\big)$. Согласно лемме 1 это означает, что $\mu \in IS(X)$ и $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$. Следовательно, $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Поэтому из предложения 6 имеем $\operatorname{supp} IS(f)(\mu) \subset B$. Откуда $IS(f)(\mu) \in IS(B)$, т. е. $\mu \in IS(f)^{-1}\big(IS(B)\big)$.

Наоборот, пусть $\mu \in IS(f)^{-1}(IS(B))$. Тогда $IS(f)(\mu) \in IS(B)$, т. е. $\operatorname{supp} IS(f)(\mu) \subset B$. Следовательно, согласно предложению 6 имеем $f(\operatorname{supp} \mu) \subset B$. Это означает, что $\operatorname{supp} \mu \subset f^{-1}(B)$, откуда $\mu \in IS(f^{-1}(B))$. Предложение 10 доказано.

Пусть $\{X_\alpha,\ p_\alpha^\beta;\ A\}$ — обратный спектр, индексированный элементами множества A и состоящий из компактов. Через $\lim X_\alpha$ обозначим предел этого спектра, а через $p_\alpha: \lim X_\alpha \to X_\alpha$, $\alpha \in A$ — предельные проекции. Обратный спектр $\{X_\alpha,\ p_\alpha^\beta;\ A\}$ порождает обратный спектр $\{IS(X_\alpha),\ IS(p_\alpha^\beta);\ A\}$, предел которого обозначим через $\lim IS(X_\alpha)$, а предельные проекции через $pr_\alpha: \lim IS(X_\alpha) \to IS(X_\alpha)$. Отображения $IS(p_\alpha): IS(\lim X_\alpha) \to IS(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, порождают отображение $R_{IS}: IS(\lim X_\alpha) \to \lim IS(X_\alpha)$.

Предложение 11. Функтор IS непрерывен, т. е. отображение $R_{IS}: IS(\lim X_\alpha) \to \lim IS(X_\alpha)$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. Так как взятие аффинной комбинации и взятие замыкания являются непрерывным операциями, то из теоремы 1 и непрерывности функтора I идемпотентных вероятностных мер, следует, что $R_{IS}: IS(\lim X_\alpha) \to \lim IS(X_\alpha)$ есть гомеоморфизм. Предложение 11 доказано.

Предложение 12. Функтор IS сохраняет пересечение, т. е. для любой пары A, B замкнутых подмножеств компактного хаусдорфово пространства X имеет место

$$IS(A \cap B) = IS(A) \cap IS(B).$$

Доказательство. Ясно, что включение $IS(A \cap B) \subset IS(A) \cap IS(B)$ справедливо. Если $\mu \in IS(A) \cap IS(B)$, то $\operatorname{supp} \mu \subset A$ и $\operatorname{supp} \mu \subset B$, следовательно, $\operatorname{supp} \mu \subset A \cap B$. Откуда $\mu \in IS(A \cap B)$, т. е. $IS(A \cap B) \supset IS(A) \cap IS(B)$. Предложение 12 доказано.

Таким образом, доказано следующий основной результат работы.

Теорема 2. Функтор $IS: Comp \to Comp$ является нормальным функтором.

Авторы выражают свои глубокую признательность доктору физико-математических наук Адилбеку Заитову за постановку задач и его участия в обсуждениях полученных результатов.

Список литературы:

1. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. №3(219). С. 3-62. http://dx.doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247

2. Заричный М. М. Пространства и отображения идемпотентных мер // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74. №3. С. 45-64. https://doi.org/10.4213/im2785

3. Заитов А. А., Ишметов А. Я. Гомотопические свойства пространства I_f(X) идемпотентных вероятностных мер // Математические заметки. 2019. Т. 106. №4. С. 531-542. https://doi.org/10.1134/S0001434619090244

4. Заитов А. А. Некоторые категорные свойства функторов O_τ и O_R слабо аддитивных функционалов // Математические заметки. 2006. Т. 79. №5. С. 681-693. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0072-0

5. Заитов А. А. Геометрические и топологические свойства подпространства P_f(X) вероятностных мер // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. №10. С. 28-37. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-28-37

6. Ишметов А. Я. О функторе I_f идемпотентных вероятностных мер // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №4. С. 24-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02

7. Холтураев Х. Некоторые применения пространства идемпотентных вероятностных мер // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №4. С. 38-46. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/04

References:

1. Shchepin, E V (1981). Functors and uncountable powers of compacta. *Russian Mathematical Surveys, 36*(3), 1. http://dx.doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247

2. Zarichnyi, M. M. (2010). Spaces and maps of idempotent measures. *Izvestiya: Mathematics,74*(3). 481. https://doi.org/10.4213/im2785

3. Zaitov, A. A., & Ishmetov, A. Ya. (2019). Homotopy Properties of the Space If(X) of Idempotent Probability Measures. *Mathematical Notes volume, 106,* 562–571. https://doi.org/10.1134/S0001434619090244

4. Zaitov, A.A. (2006). Some categorical properties of the functors O τ and O R of weakly additive functionals. *Math Notes, 79,* 632–642. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0072-0

5. Zaitov, A. A. (2019). Geometricheskie i topologicheskie svoistva podprostranstva P_f(X) veroyatnostnykh mer. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika,* (10), 28-37. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-28-37

6. Ishmetov, A. (2019). Functor If of idempotent probability measures. *Bulletin of Science and Practice, 5*(4), 24-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02 (in Russian).

7. Kholturaev, Kh. (2019). Some applications idempotent probability measures space. *Bulletin of Science and Practice, 5*(4), 38-46. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/04 (in Russian).

Работа поступила в редакцию 28.01.2020 г.

Принята к публикации 31.01.2020 г.

Ссылка для цитирования:

Курбанов Х. Х., Ёдгаров С. Ж. Функтор *IS* в категории компактных Хаусдорфовых пространств // Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. №3. С. 13-22. https://doi.org/10.33619/2414-2948/52/01

Cite as (APA):

Kurbanov, Kh., & Yodgarov, S. (2020). A functor *IS* in the Category Compact Hausdorff Spaces. *Bulletin of Science and Practice, 6*(3), 13-22. https://doi.org/10.33619/2414-2948/52/01 (in Russian).