УДК 517.2: 517.3

# ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

# EXAMPLES OF STUDENT SOLUTIONS MATHEMATICAL OLYMPIAD PROBLEMS

**©Шувалова Л. Е.,**
*Казанский национальный исследовательский технологический университет,*
*г. Нижнекамск, Россия, shyvalovale@yandex.ru*
**©Shuvalova L.,**
*Kazan National Research Technological University,*
*Nizhnekamsk, Russia, shyvalovale@yjandex.ru*
**©Сороколетова В. И.,**
*Казанский национальный исследовательский технологический университет,*
*г. Нижнекамск, Россия, lera1998valera@mail.ru*
**©Sorokoletova V.,**
*Kazan National Research Technological University,*
*Nizhnekamsk, Russia, lera1998valera@mail.ru*

*Аннотация.* Данная статья содержит условия и решения некоторых нетривиальных задач Всероссийской студенческой Интернет–олимпиады по математике.

*Abstract.* Some problems of the All-Russian student Internet Olympiad in mathematics are considered.

*Ключевые слова:* предел функции, определенный интеграл, неравенство Коши-Буняковского.

*Keywords:* limit of a function, a definite integral, the Cauchy–Bunyakovskii inequality.

Настоящая статья является продолжением работы [1], и преследует ту же цель — показать, что разбор олимпиадных задач способствует активизации научного творчества студентов. Кроме того, воспитывает нетривиальное мышление и умение быстро находить пути решения. Основу данной работы составляют задачи Всероссийской студенческой Интернет-олимпиады, которые подбираются из разных областей математики и имеют разные уровни сложности. Возможно, именно решение таких заданий подтолкнет студентов к серьезным результатам в научной деятельности.

Рассмотрим несколько видов таких задач.

*Пример 1*. Найти $\dfrac{5}{S-\dfrac{2}{\pi}}$,

если $S$ - площадь фигуры, ограничена графиком функции

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2}+x^2}{x^{2n}+1}$$

и прямыми $x=0, x=2, y=0$.

Решение:Рассмотрим два случая.

Пусть $0<x<1$, тогда $x^{2n}\to 0$, при $n\to+\infty$ и $f(x)=x^2$.Если $1<x<2$, то

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{x^{2n}}\right)}{x^{2n}\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)}=\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Итак, объединяя полученные результаты, имеем

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при} \quad 0<x<1; \\ \sin\frac{\pi x}{2}, & \text{при} \quad 1\le x<2. \end{cases}$$

Фигуру, площадь которой необходимо найти (Рисунок), представим в виде объединения двух криволинейных трапеций $S=S_1+S_2$:

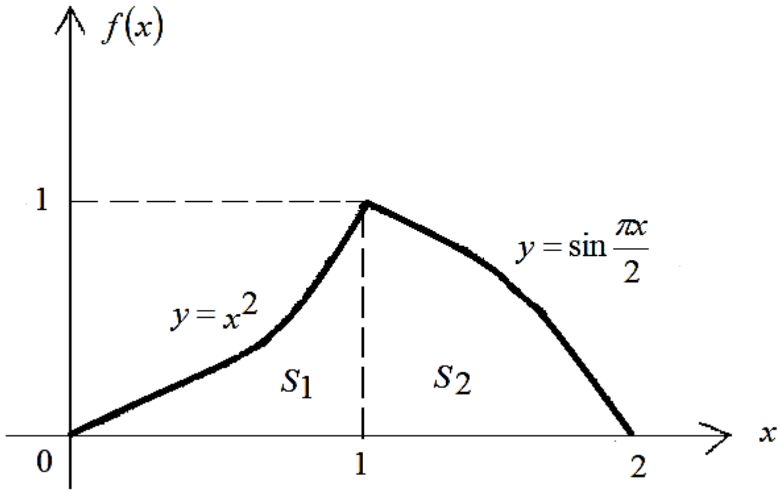


Рисунок.

$$S_1=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\ S_2=\int\limits_1^2 \sin\frac{\pi x}{2}dx=\frac{2}{\pi}.$$

Отсюда

$$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}.$$

Поэтому искомое значение выражения равно

$$\frac{5}{S-\dfrac{2}{\pi}}=15.$$

*Пример 2.*

Непрерывная на отрезке $[0;\pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет соотношениям $\int\limits_0^\pi f(x)\sin x dx=1$ и $\int\limits_0^\pi f(x)\cos x dx=1$. Найти наименьшее возможное значение выражения $\pi\int\limits_0^\pi f^2(x)dx.$

Решение:

Учитывая, что функции $f(x),\sin(x),\cos(x)$ непрерывны на промежутке $[0;\pi]$ и применяя свойство определенного интеграла, имеем

$$2=\int\limits_0^\pi f(x)(\sin x+\cos x)dx.$$

Далее, воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)dx\le\sqrt{\int\limits_a^b f_1^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b f_2^2(x)dx}.$$

Отсюда получаем

$$2=\int\limits_0^\pi f(x)(\sin x+\cos x)dx\le\sqrt{\int\limits_0^\pi f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int\limits_0^\pi(\sin x+\cos x)^2dx}. \tag{1}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\pi(\sin x+\cos x)^2dx=\int\limits_0^\pi(1+\sin 2x)dx=\pi,$$

то воспользовавшись соотношением (1) находим неравенства

$$2\le\sqrt{\int\limits_0^\pi(f(x))^2dx}\cdot\sqrt{\pi},$$

$$4\le\pi\int\limits_0^\pi f^2(x)dx.$$

Итак, наименьшее возможное значение равно 4.

*Пример 3.*

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $\int\limits_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt = x\cdot f(x),\ f(1)=6$. Тогда $f(3)-?$

Решение:

Сделав подстановку $\frac{t}{3}=z$, имеем

$$\int\limits_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt = 3\int\limits_0^{x} f(z)dz.$$

Применив теорему о производной интеграла по верхнему пределу [2], находим

$$\left(3\int\limits_0^{x} f(z)dz\right)^{/} = \left(x\cdot f(x)\right)^{/},$$

$$3f(x) = f(x) + x\cdot f^{/}(x).$$

Отсюда

$$xf^{/}(x) = 2f(x).$$

Решаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\int \frac{d(f(x))}{f(x)} = 2\int \frac{dx}{x}.$$

Имеем:

$$\ln f(x) = 2\ln x + \ln c,\ f(x) = cx^2,\ c=6.$$

Окончательно находим

$$f(3)=54.$$

Полагаем, что разобранные выше задачи могут быть использованы при подготовке к будущим олимпиадам, математическим конкурсам и турнирам.

*Список литературы:*

1. Апайчева Л. А., Шувалова Л. Е. Некоторые способы решения нестандартных задач по теме «Ряды» // Инновационная наука. 2017. Т. 4. №4.С. 8-11.

2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Шикин Е. В., Заляпин В. И.. Вся высшая математика. М.:Едиториал УРСС, 2004. 192 с.

*Reference*

1. Apaycheva, L. A., & Shuvalova, L. E. (2017). Some ways of solving non-standard problems on the topic "Rows". *Innovative science, 4* (4). 8-11.

2. Krasnov, M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I., Shikin E. V., & Zalyapin V. I. (2004). All higher mathematics. Moscow: *Editorial URSS,* 192.

*Работа поступила в редакцию 09.04.2018 г.*

*Принята к публикации 13.04.2018 г.*

---

*Ссылка для цитирования:*

Шувалова Л. Е., Сороколетова В. И. Примеры решения студенческих математических олимпиадных задач // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. №5. С. 668-672. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/shuvalova-1 (дата обращения 15.05.2018).

*Cite as (APA):*

Shuvalova, L., & Sorokoletova, V. (2018). Examples of student solutions mathematical olympiad problems. *Bulletin of Science and Practice, 4*(5), 668-672.