УДК 517.946+531 https://doi.org/10.33619/2414-2948/46/01

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

**©Шемелова О. В.,** *ORCID: 0000-0001-5765-9816, SPIN-код: 4216-8679, канд. физ.-мат. наук, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, olga-shemelova@yandex.ru*

# ANALYSIS MATHEMATICAL MODELS OF SYSTEMS OF DIFFERENT PHYSICAL NATURE

**©Shemelova O.,** *ORCID: 0000-0001-5765-9816, SPIN-code: 4216-8679, Ph.D., Kazan National Research Technological University, Nizhnekamsk, Russia, olga-shemelova@yandex.ru*

*Аннотация.* В работе проводится анализ свойств различных процессов, явлений и объектов при котором можно убедиться в том, что отдельные из них обнаруживают определенные подобия или сходства. Такие сходства могут проявляться как в структуре, так и в динамике поведения объектов. В этих случаях для построения математических моделей поведения систем различной физической природы можно пользоваться аналогичными уравнениями. Таким образом, немаловажной основой при моделировании поведения сложных систем используются аналогии в исследовании изменения поведения широкого класса систем.

*Abstract.* The paper analyzes the properties of various processes, phenomena and objects in which you can make sure that some of them show certain similarities or similarities. Such similarities can manifest themselves both in the structure and in the dynamics of the behavior of objects. In these cases, to construct mathematical models of the behavior of systems of various physical natures, one can use similar equations. Thus, an important basis for modeling the behavior of complex systems uses analogies in changing the behavior of a wide class of systems.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, системы различной физической природы, уравнения, фазовые переменные.

*Keywords:* math modeling, systems of various physical nature, equations, phase variables.

Как известно, математическая модель функционирования любой системы описывается системами алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. При этом так называемые компонентные и топологические уравнения представляют собой исходные уравнения, необходимые для формирования таких математических моделей различных систем. Компонентным уравнением называют такие уравнения, которые описывают свойства элементов (или компонентов) системы, а топологическое уравнение описывает взаимосвязи в составе моделируемой системы.

Вместе взятые топологические и компонентные уравнения реальной физической системы представляют собой исходную математическую модель системы.

 Т. 5. №9. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/46

Фактически топологические и компонентные уравнения в системах, содержащих элементы различной физической природы, указывают на различные физические свойства, но при этом могут иметь схожий формальный вид. Идентичная форма записи этих математических соотношений позволяет говорить об аналогиях топологических и компонентных уравнений в системах различной физической природы [1–2]. Такие аналогии рассматривают для механических поступательных, механических вращательных, электрических, гидравлических (пневматических), акустических, тепловых, а также экономических и экологических объектов. Выполняя обзор существующих аналогий, возникает практически важный вывод: значительная часть алгоритмов построения и исследования математических моделей широкого класса систем оказывается инвариантной и может быть применена к анализу проектируемых объектов в разных предметных областях. Идентичность математического аппарата построения математических моделей системы особенно удобно при анализе таких систем, которые состоят из подсистем различной физической природы [3].

Так, например, топологические уравнения могут принимать вид:

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{X}) = 0\,. \tag{1}$$

В свою очередь, компонентные уравнения можно записать таким образом:

$$\mathbf{f}_k\left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}, \mathbf{X}, t\right) = 0\,, \tag{2}$$

где вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор фазовых переменных, $t$ — время.

При формировании математических моделей различных систем различают фазовые переменные двух видов. Можно обозначить следующие их обобщенные наименования: фазовые переменные типа потенциала (например, электрическое напряжение) и фазовые переменные типа потока (например, электрический ток). При этом всякое компонентное уравнение описывает характер связей между разнотипными фазовыми переменными, которые относятся к одному компоненту. В качестве примера можно рассмотреть закон Ома, который описывает связь между напряжением и током в резисторе. Топологическое же уравнение характеризует связи между однотипными фазовыми переменными, но в разных компонентах.

Как известно, математические модели допускается реализовывать либо в виде систем уравнений, либо в форме эквивалентных схем (графическом виде), в случае, когда между этими формами установлено взаимно однозначное соответствие.

Проанализируем некоторые зависимости в топологических и компонентных уравнениях для некоторых систем разной физической природы.

К примеру, фазовыми переменными в механических поступательных системах являются силы и скорости.

В механических поступательных системах компонентным уравнением будет являться уравнение, характеризующее инерционные свойства тел, которое в силу второго закона Ньютона имеет вид:

$$F = m\frac{dv}{dt}\,, \tag{3}$$

где $F$ — сила; $m$ — масса; $v$ — поступательная скорость.

 Т. 5. №9. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/46

Компонентным уравнением в таких системах описываются упругие свойства тел. При этом уравнение можно получить, используя закон Гука. Так в одномерном случае, когда учитываются продольные деформации упругого стержня:

$$G = E\varepsilon\,, \tag{4}$$

где $G$ — механическое напряжение; $E$ — модуль упругости; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ — относительная деформация; $\Delta l$ — изменение длины $l$ упругого тела под воздействием напряжения $G$. Принимая во внимание, что для напряжения существует отношение $G = \dfrac{F}{S}$, где $F$ — сила, $S$ — площадь поперечного сечения тела, и, находя производную по времени от уравнения (4), получим:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{SE}{l}\frac{d(\Delta l)}{dt} \tag{5}.$$

Учитывая, что соотношение $g = \dfrac{SE}{l}$ обозначает жесткость, а выражение $v = \dfrac{d(\Delta l)}{dt}$ не что иное, как выражение скорости, для уравнения (5) можно записать

$$\frac{dF}{dt} = g\,v\,.$$

Величина $\dfrac{1}{g} = \dfrac{l}{SE} = L_M$, записанная через обратное соотношение для жесткости, называется гибкостью. Тогда последнее уравнение можно представить в виде:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{L_M}v\,,$$

Откуда

$$v = L_M\frac{dF}{dt}\,. \tag{6}$$

В механических системах твердых тел диссипативные свойства выражаются соотношениями, которые описывают связи между скоростью взаимного перемещения и силой трения взаимодействующих тел. В этих соотношениях при этом не возникает дифференцирования скоростей или сил.

В первую очередь, существующие топологические уравнения описывают закон равновесия сил: сумма сил, приложенных к телу, включая силу инерции, равна нулю (принцип Даламбера). Кроме того, эти уравнения учитывают закон скоростей, в соответствии с которым сумма относительной, переносной и абсолютной скоростей равна нулю.

Аналогии механических поступательных и механических вращательных систем очевидны. Во вращательных системах также справедливы топологические и компонентные уравнения, аналогичные уравнениям для поступательных систем. В этих соотношениях учитывается замена поступательных скоростей на угловые, сила меняется на вращательные моменты, масса — на моменты инерции, а жесткость — на вращательную жесткость.

Перейдем к моделям, описывающим электрические системы. Здесь возможно воспользоваться одной из возможных электромеханических аналогий. Рассмотрим такую инвариантность, в которой потенциал относят к фазовым переменным типа скорости, а поток считают фазовой переменной типа силы.

Т. 5. №9. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/46

Итак, в электрических системах фазовыми переменными определяются электрические напряжения и токи. Элементами электрической системы могут выступать либо простые двухполюсные элементы, либо более сложные двух– и многополюсные. К простейшим двухполюсникам относятся элементы: сопротивление $R$, емкость $C$ и индуктивность $L$.

С помощью указанных параметров составляются компонентные уравнения простых двухполюсников:

для сопротивления (закон Ома):

$$u = iR, \tag{7}$$

для емкости:

$$i = C\frac{du}{dt}, \tag{8}$$

для индуктивности:

$$u = L\frac{di}{dt}, \tag{9}$$

где $u$ — напряжение (точнее, падение напряжения на двухполюснике); $i$ — ток.

Этими математическими соотношениями можно описать другие, возможно более сложные системы. Большую сложность можно объяснить наличием зависимостей параметров $R$, $C$, $L$ от температуры, или же присутствием нелинейности в уравнениях (7–9) (т. е. зависимостью $R$, $C$, $L$ от фазовых переменных), возможно также наличие более двух полюсов [4]. Во всяком случае, многополюсные компоненты можно упростить до системы взаимосвязанных простых элементов.

Топологические соотношения в математических моделях электрических систем описывают законы Кирхгофа для напряжений и токов. В соответствии с законом Кирхгофа для напряжений, сумма напряжений на компонентах вдоль любого замкнутого контура в эквивалентной схеме равна нулю, т. е.: $\sum u_i = 0$.

Ну а согласно закону Кирхгофа для токов сумма токов в любом замкнутом сечении эквивалентной схемы равна нулю или: $\sum i_k = 0$.

Легко увидеть присутствие аналогий между механическими и электрическими системами. В компонентных уравнениях, например, силам (или моментам) и скоростям в механических системах соответствуют токи и напряжения в электрических системах. При этом самим компонентным уравнениям (3) и (6) и присутствующих в них показателях $M$ и $L_M$ соответствуют компонентные (8) и (9) и показатели $C$ и $L$. Также можно проследить определенную аналогию между топологическими уравнениями в моделях механических и электрических систем.

В гидравлических системах к фазовым переменным следует отнести расходы и давления. Как и в предыдущем случае, компонентные уравнения таких систем описывают свойства жидкости рассеивать или накапливать энергию.

Так, например, компонентные уравнения для жидкости на линейном участке трубопровода длиной $\Delta l$ в форме уравнения Навье-Стокса для ламинарного течения жидкости имеют вид:

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} - 2\alpha U,$$

Т. 5. №9. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/46

где ρ — плотность; $U$ — скорость течения; $P$ — давление жидкости; α — коэффициент линеаризованного вязкого трения. Учитывая, что справедливо соотношение $U = \frac{Q}{S}$, где $Q$ — объемный расход; $S$ — площадь поперечного сечения трубопровода, то, выполняя замену пространственной производной отношением конечных разностей, можно записать уравнение:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{S\Delta P}{\rho \Delta l} - \frac{2\alpha Q}{\rho}.$$

Выражая из последнего соотношения величину падения давления на рассматриваемом участке трубопровода $\Delta P$, получим:

$$\Delta P = \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \frac{\rho \Delta l}{S} + \frac{2\alpha Q \Delta l}{S}.$$

Учитывая известные соотношения для отражающей инерционные свойства жидкости гидравлической индуктивности $L_{\tilde{A}} = \frac{\rho \Delta l}{S}$ и отражающего свойства вязкого трения гидравлического сопротивления $R_{\tilde{A}} = \frac{2\alpha \Delta l}{S}$, последнее уравнение можно представить в виде:

$$\Delta P = L_{\tilde{A}} \frac{\partial Q}{\partial t} + R_{\tilde{A}} Q.$$

Используя закон Гука, опишем компонентным уравнением явление сжимаемости жидкости в виде:

$$\Delta P = \frac{E \Delta l}{l}.$$

Найдем производную от последнего выражения:

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial t} = \frac{E}{l} \frac{\partial (\Delta l)}{\partial t}.$$

Если учесть, что для объемного расхода $Q$ и скорости $U = \frac{\partial (\Delta l)}{\partial t}$ известно соотношение $Q = US$, а также выражение для гидравлической емкости $C_{\tilde{A}} = \frac{E}{Sl}$, то получим уравнение вида:

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial t} = C_{\tilde{A}} Q.$$

Таким образом, стоит отметить, что можно усмотреть аналогии рассмотренных механических и электрических систем с гидравлическими системами.

В итоге, можно заключить, что аналогии в кинематических и динамических показателях различных систем позволяют описывать фазовое состояние систем различной физической природы в так называемых унифицированных переменных [2] и использовать для исследования динамических процессов стандартизированные методы и модели.

*Список литературы:*

1. Шемелова О. В. Построение дифференциально-алгебраических уравнений динамики систем с учетом уравнений связей // Вестник Казанского технологического университета. 2016. Т. 19. №18. С. 167-169.

2. Шемелова О. В. Классификация основных характеристик систем различной физической природы // Вестник Казанского технологического университета. 2015. Т. 18. №6. С. 192-194.

3. Шемелова О. В. Математическое моделирование в процессах химической технологии // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. №12. С. 20-23.

4. Шемелова О. В. Моделирование решения задачи построения схем систем электроснабжения // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2018. №11 (260). С. 28-32.

*References:*

1. Shemelova, O. V. (2016). Postroenie differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii dinamiki sistem s uchetom uravnenii svyazei. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta, 19*(18), 167-169. (in Russian).

2. Shemelova, O. V. (2015). Klassifikatsiya osnovnykh kharakteristik sistem razlichnoi fizicheskoi prirody. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta, 18*(6), 192-194. (in Russian).

3. Shemelova, O. (2018). Mathematical modeling in chemical technology processes. *Bulletin of Science and Practice, 4*(12), 20-23. (in Russian).

4. Shemelova, O. V. (2018). Modelirovanie resheniya zadachi postroeniya skhem sistem elektrosnabzheniya. *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal s prilozheniem, 11*(260). 28-32. (in Russian).

*Работа поступила в редакцию 26.07.2019 г.*

*Принята к публикации 29.07.2019 г.*

---

*Ссылка для цитирования:*

Шемелова О. В. Математические модели анализа систем различной физической природы // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №9. С. 11-16. https://doi.org/10.33619/2414-2948/46/01

*Cite as (APA):*

Shemelova, O. (2019). Mathematical Models of Analysis of Systems of Different Physical Nature. *Bulletin of Science and Practice, 5*(9), 11-16. https://doi.org/10.33619/2414-2948/46/01 (in Russian).